CLASA a VIII-a OLM

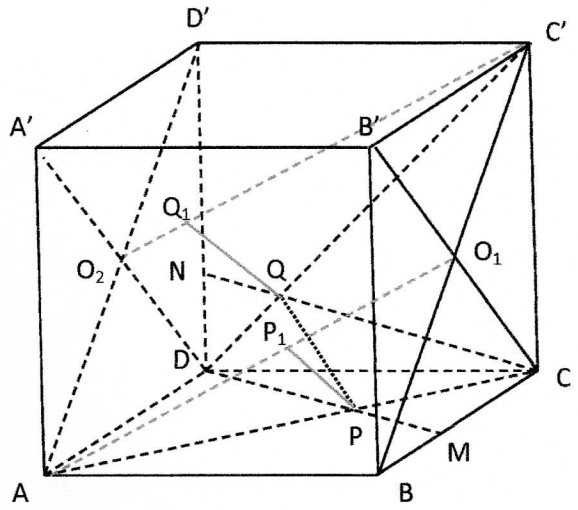
SUBIECTUL IV

În cubul $ABCDA'B'C'D'$ având muchia de lungime a se consideră punctele $M \in (BC)$ şi $N \in (DD')$ $\{P\} = AC \cap DM$ şi $\{Q\} = NC \cap DC'$.

a) Dacă M şi N sunt mijloacele muchiilor (BC), respectiv (DD'), calculaţi lungimea lui [MN].

b) Demonstraţi că $PQ \parallel (ABC') \Leftrightarrow BM = ND'$.

Barem de corectare şi evaluare:



Notăm $(ABC'D') = \alpha$, $\frac{MC}{a} = k_1, \frac{ND}{a} = k_2$.

Fie O_1 şi O_2 centrele feţelor BCB'C', respectiv ADD'A'.

a) În ΔCDM cu $m(\sphericalangle C) = 90^\circ$, aplic th. Pitagora:

$DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ **1p**

În ΔDMN cu $m(\sphericalangle D) = 90^\circ$, aplic th. Pitagora:

$MN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ **1p**

b) Avem $d(C, \alpha) = CO_1$, $d(D, \alpha) = DO_2$.

Fie $PP_1 \perp \alpha \Rightarrow P_1 \in AO_1$ şi $PP_1 \parallel CO_1$

Fie $QQ_1 \perp \alpha \Rightarrow Q_1 \in C'O_2$ şi $QQ_1 \parallel DO_2$ **1p**

$\Delta PAD \sim \Delta PCM \Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{AD}{MC} = \frac{1}{k_1} \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{1}{1+k_1}$ (1)

$\Delta QC'C \sim \Delta QDN \Rightarrow \frac{QC'}{QD} = \frac{CC'}{DN} = \frac{1}{k_2} \Rightarrow \frac{C'Q}{C'D} = \frac{1}{1+k_2}$ (2) **1p**

$\Delta APP_1 \sim \Delta ACO_1 \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{PP_1}{CO_1}$ (3)

$\Delta C'QQ_1 \sim \Delta C'DO_2 \Rightarrow \frac{C'Q}{C'D} = \frac{QQ_1}{DO_2}$ (4) **1p**

Din (1) şi (3) $\Rightarrow \frac{PP_1}{CO_1} = \frac{1}{1+k_1}$, iar din (2) şi (4) $\Rightarrow \frac{QQ_1}{DO_2} = \frac{1}{1+k_2}$ **1p**

$PQ \parallel \alpha \Leftrightarrow PP_1 = QQ_1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+k_1} = \frac{1}{1+k_2} \Leftrightarrow k_1 = k_2 \Leftrightarrow MC = ND \Leftrightarrow BM = ND'$ **1p**